EXERCICE N°1 : 20' 3 points

On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n - 2u_{n+1} = 2n + 3, \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Montrer qu'il existe un entier b indépendant de n tel que $v_n = u_n + nb - 1$ soit le terme général d'une suite géométrique que l'on déterminera. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = \frac{1}{2^n} - 2n + 1$.

2) On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Calculer S_n en fonction de n et étudier sa limite quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE N°2 : 30' 5 points

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = \frac{\sqrt{7}}{4} \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{2 - u_n^2}}, \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.

b) Montrer que u est convergente et calculer sa limite.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq \frac{4}{5} u_n$ et que $u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n u_0$. Retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Montrer que S est majorée par $5u_0$ et que S est convergente.

4) Soit v la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} v_0 = \frac{1}{2} \\ v_{n+1} = \sqrt{u_n + v_n^2}, \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$. On pose $T_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{k=0}^{n} v_k$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq \frac{1}{2}$. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_{n+1} - v_n \leq u_n$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leq v_n \leq \frac{1}{2} + \frac{5}{4}\sqrt{7}$. **c)** Montrer que v est convergente.

EXERCICE N°3 : 30' 5 points

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{2}{1 + u_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - 1 = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$.

b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $u_{2n+1} < 1 < u_{2n}$.

2) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - u_n = \frac{(1 - u_n)(2 + u_n)}{3 + u_n}$. En déduire que (u_{2n}) est décroissante et que (u_{2n+1}) est croissante.

3) a) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n} - u_{2n+1}$. Montrer que $v_{n+1} \leq \frac{1}{2} v_n$ et déduire que $v_n \leq \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

b) Montrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont deux suites adjacentes et déterminer leurs limite l. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$?

EXERCICE N°4 : 30' 6 points

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{2 u_n}{1 + u_n^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 < u_n < 1$.

b) Montrer que u est convergente et calculer sa limite.

2) a) Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\frac{1 - u_n}{1 + u_n^2} \leq \frac{1}{1 + u_0^2}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(1 - u_n)$ et que $1 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$.

c) Retrouver alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

3) Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 - \frac{5}{n} \leq S_n \leq 1$.

Déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

4) Soit pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1 - u_n}{1 + u_n}$. Montrer que $v_{n+1} = (v_n)^2$. En déduire que $V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{(2^n)}$.

5) Soit pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n = v_0 . v_1 . \ldots . v_n$ et $w_n = \frac{P_n}{v_{n+1}}$.

Calculer P_n en fonction de n puis montrer que w est une suite constante que l'on déterminera.